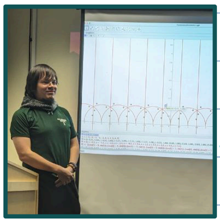
El Anillo de Chow y las Clases de Chern: Introducción, Ejemplos y un Poco más.

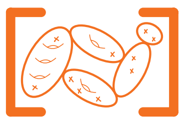
⚠ Todas las imágenes son robadas
⚠ No se reservaron derechos
⚠ Todo derecho de autor se infringe
⚠ Este trabajo no recibió apoyo de la NSF
⚠ Hay conflictos de interés

I) ¿Dónde quedamos?



i) Teoremas de Riemann (RR, RH, T∃R).
ii) Estratificación $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.
iii) $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ es una orbidad y funtor.
iv) Clases de Chern: λ, ψ, ω, e

i) ~50%
ii) Estratificación por dimensión:
iii) Orbidades y funtor ↓
iv) Clases de Chern: ¡HOY!



$\overline{\mathcal{M}}_{6,15}$
$\cup$I
codim. = 5

II) El Anillo de Chow

Elementos $\longleftrightarrow$ Subvariedades de V

Suma $\longleftrightarrow$ Formal

Producto $\longleftrightarrow$ Intersección

i-ésimo grupo de Chow

$A^i(V) = \langle X : X \subseteq V$ subvar. de codimensión $i \rangle / \sim$

$\ni$

$\alpha = \sum c_i [X_i] \to$ ciclo

$\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta = \mathrm{div}(s)$

$[X] \cdot [Y] = [X \cap Y]$ (transversal)

↳ $\mathrm{codim}([X]\cdot[Y]) = \mathrm{codim}[X] + \mathrm{codim}[Y]$

desde codimension 0 hasta total

Anillo de Chow $\leftarrow A^*(V) = \bigoplus_{i=0}^{n} A^i(V)$

↳ grupos graduados

¿Cómo se relaciona con cohomología?

$$A^i(V) \to H_{n-i}(V) \to H^i(V)$$

ciclo $\longmapsto$ ciclo $\longmapsto$ dual de Poincaré

Ejemplo: $A^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H] / \langle H^{n+1} \rangle$

$H \to$ clase hiperplano

En $\mathbb{P}^2$:

fundamental

$$A^*(\mathbb{P}^2) = \langle 1 \rangle \oplus \langle H \rangle \oplus \langle \text{pto.} \rangle$$

$\to H: \; aX + bY + cZ = 0$

¿Quién está en A^1?

$V(XY - Z^2) = \mathcal{C} \xrightarrow{\text{codim}} 1$

$\Longrightarrow \mathcal{C} \in \langle H \rangle$

$\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} \, (\mathcal{C} = cH)$ ¿cuál c?

Queremos: $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ con

$$\begin{cases} f^{-1}(0:1) = \mathcal{C} \\ f^{-1}(1:0) = 1\text{-ciclo} \end{cases}$$

En $\mathbb{P}^1$ todos los ptos. son equiv. $\Longrightarrow \mathcal{C} \sim 1$-ciclo

$f(X:Y:Z) = [XY - Z^2 : ¿?] \Longrightarrow f^{-1}(0:1) = \mathcal{C}$

¿? $\to$ 1-ciclo de grado 2

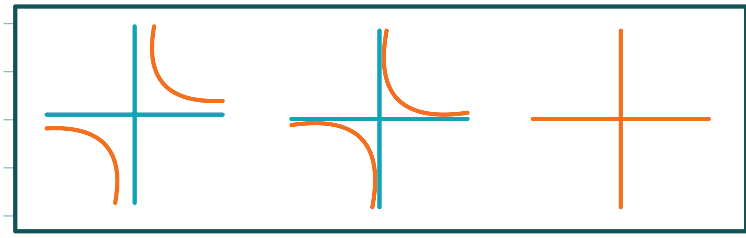
$\{X=0\} \in H$, $\{Y=0\} \in H$ y $\{X=0\} + \{Y=0\} = \{XY = 0\}$
↓
grado 2

$$f(X:Y:Z) = [XY - Z^2 : XY] \Longrightarrow \begin{cases} f^{-1}(0:1) = \mathcal{C} \\ f^{-1}(1:0) = 2H \end{cases}$$

$\therefore \mathcal{C} \sim 2H$

En general: $V(f) \sim dH$ donde $\deg(f) = d$

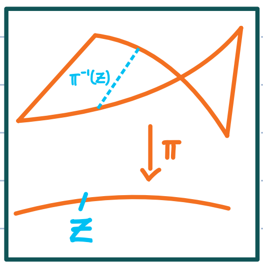
Observemos que:



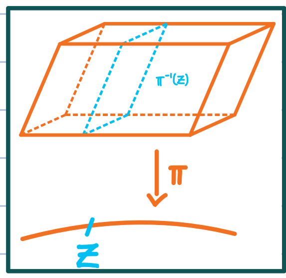
Las fibras de $f|_{\mathbb{A}^2}$ deforman $\mathcal{C}$ en $\{XY=0\}$

III) Clases de Chern

↳ Fibrados



$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$$



$\pi^{-1}(z) \cong \mathbb{C}$
rango 1: línea

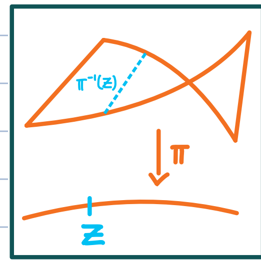
$\pi^{-1}(z) \cong \mathbb{C}^2$
rango 2

→ Abstractamente

- $c_i(E) \in A^i(B)$, $\operatorname{codim}(c_i) = i$.
- $c_i(E) \neq 0$, $0 \le i \le r$
- $c_0(E) = 1$
- $c_1(L) = [\operatorname{div}(s)]$, $s: B \to L$ meromorfa

Ejemplo:

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}(d) \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$



← fibrado de línea

▷ Caracterización:

$s: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{O}(d)$ meromorfa

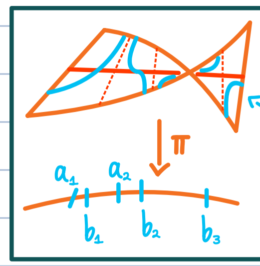
$\Longrightarrow s = p/q$, $\deg p - \deg q = d$

▷ Sus clases de Chern

$$A^*(\mathbb{P}^1) = \underset{\underset{c_0(\mathcal{O}(d))}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{\langle 1\rangle} \oplus \underset{\underset{c_1(\mathcal{O}(d))}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{\langle \text{pto.}\rangle}$$

→ c_0 : todo $\mathbb{P}^1$

→ $c_1 = [\operatorname{div}(s)]$



$$\operatorname{div}(s) = [a_1] + 3[a_2] - 2[b_1] - 2[b_2] - [b_3]$$

$$\sim (4-5)[\text{pto.}] = -[\text{pto.}] \quad (d=-1)$$

IV) Un poquito más...

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[dr] & & \mathbb{L}_i \arrow[dl] \\ & \overline{\mathcal{M}}_{g,n} & \end{tikzcd}$$

$\lambda_i = c_i(\mathbb{E})$

$\psi_i = c_1(\mathbb{L}_i)$