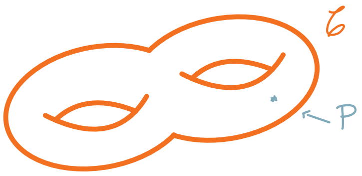
El Espacio Móduli de Curvas:

Introducción y Ejemplos

⚠ Ninguna imagen se usa con permiso
⚠ No se reservan derechos
⚠ Todo derecho de autor se infringe
⚠ Este trabajo no recibió apoyo de la NSF
⚠ Hay conflictos de interés

Comprendamos el nombre



→ P es un punto marcado de la curva C

↳ Una curva sobre $\mathbb{C}$ se ve como una superficie

+ suave + compacta = Superficie de Riemann

> "Estructura" = datos de variedad compleja

$M_{g,n} = \{[X] : X$ S.R., género g, n ptos. dist.$\}$

↳ $Y \in [X] \iff X \cong Y$

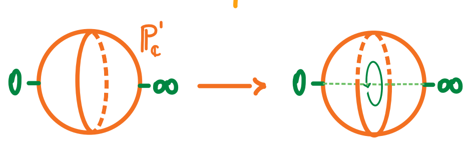
→ Estabilidad: $2-2g-n<0$

Ej.: $M_{0,1}$, $M_{0,2}$ y $M_{1,0}$

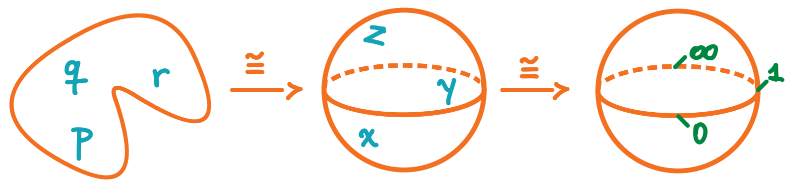
↳ $2-2(0)-(1)>0$, $2-2(0)-2=0$ y $2-2(1)-(0)=0$

Para $X \in$ (tales M):

$\exists G \leq \mathrm{Aut}\, X, |G|=\infty \wedge \{\text{ptos. marcados}\} \subseteq \mathrm{Fix}(G)$



Ej. ($M_{0,3}$): [X] de género 0 c/3 ptos. marcados

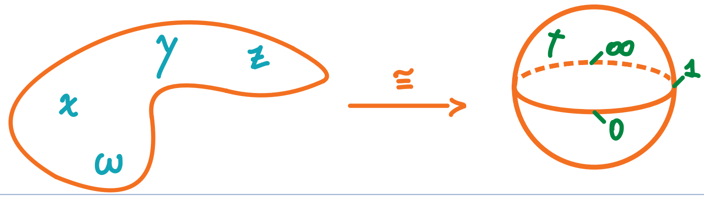


Prop.: Toda S.R. de género 0 es isomorfa a $\mathbb{P}^1$

Prop.: $\exists!\ T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ t.q. $(x,y,z) \mapsto (0,1,\infty)$

$\therefore M_{0,3} = \{[(\mathbb{P}^1,0,1,\infty)]\}$ = conj. unitario

Ej. ($M_{0,4}$):

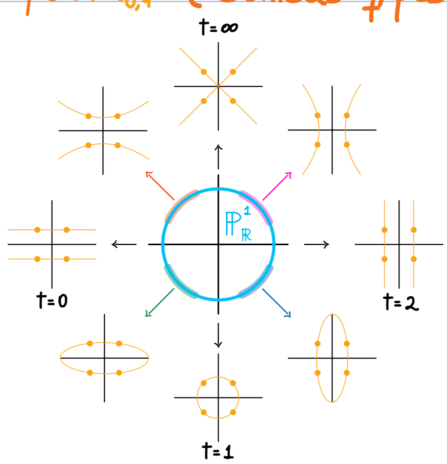


$$t = \frac{(\omega-x)(y-z)}{(\omega-z)(y-x)}$$

$\Longrightarrow M_{0,4} = \{[(\mathbb{P}^1,0,1,\infty,t)] : t \in \mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}\}$

$= \mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$

...pero $M_{0,4} = \{$Cónicas q/pasan x/4 ptos. $\neq\}$



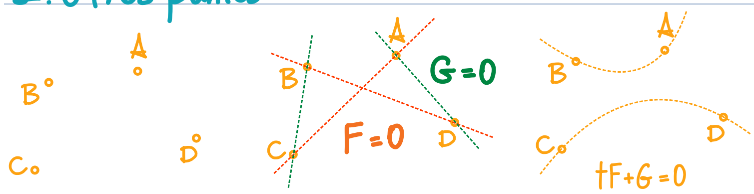
$tx^2+(2-t)y^2=2$

↳ Cónicas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por $(\pm1,\pm1)$

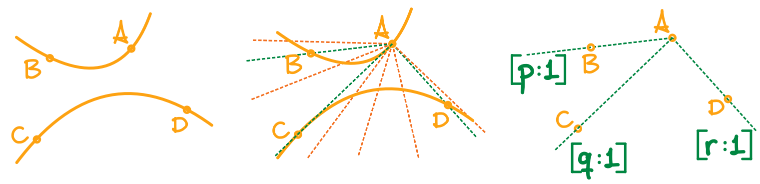
¿Podemos cambiar los ptos.?

¿Dónde se quedaron las S.R.?

1. Otros puntos



2. Cónica $\cong \mathbb{P}^1$



¡El escenario complejo!

Prop.: Toda cónica en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

→ Homogenizar F, G
→ Variar t en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ en lugar de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

Ej.: $M_{0,n} \cong (\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})^{n-3} \setminus \{t_i = t_j\}_{i,j=1}^{n-3}$

¿Cómo vemos $M_{0,n}$ como vimos $M_{0,4}$?

Ej. ($M_{1,1}$): $[X]$ de género 1, 1 pto. marcado.

Prop.: Toda S.R. de género 1 es isomorfa a:

$$\mathbb{C}/L, \quad L = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v, \quad u,v \in \mathbb{C}$$

Prop.: $\mathbb{C}/L_1 \cong \mathbb{C}/L_2 \iff L_2 = \alpha L_1,\ \alpha \in \mathbb{C}^\times$

$\Longrightarrow M_{1,1} = \{\text{retículos}\}/\mathbb{C}^\times$

↳ ¿Se puede mejorar?

Explícitamente:

$$L_1 = gen_{\mathbb{Z}}(u,v) \text{ y } L_2 = \tfrac{1}{u} L_1 = gen_{\mathbb{Z}}(1,\tau)$$

Lem.: $\tau \in \mathbb{H} = \{Im(z) > 0\}$ si $\arg(v) > \arg(u) \mod [-\pi,\pi]$

→ $\tau = \frac{v}{u} = (se^{i\varphi})(re^{i\theta})^{-1} = \frac{s}{r} e^{i(\varphi-\theta)} \in \mathbb{H}$ pues $\varphi - \theta \in [0,\pi]$

$\Longrightarrow \tau \in \mathbb{H}$ determina $[\mathbb{C}/L]$

¿Pero cómo es eso?

$$L = gen_{\mathbb{Z}}(1,\tau) \begin{cases} gen_{\mathbb{Z}}(1,\tau+1) = L \\ gen_{\mathbb{Z}}(1,-\tfrac{1}{\tau}) = -\tfrac{1}{\tau} gen_{\mathbb{Z}}(-\tau,1) = -\tfrac{1}{\tau} L \end{cases}$$

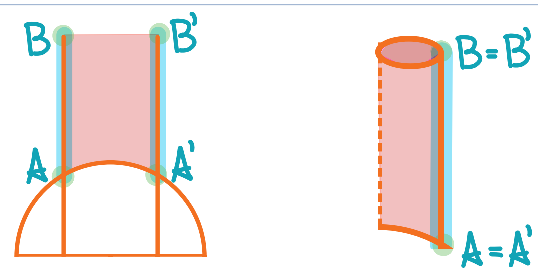
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Acción de $SL_2(\mathbb{Z}) = gen(S,T)$

$$T: \tau \longmapsto \tau+1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \tau = \frac{\tau+1}{0+1}$$

$$S: \tau \longmapsto -\tfrac{1}{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \tau = \frac{0-1}{\tau+0}$$

$\Longrightarrow M_{1,1} \cong \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$



Ex. ($M_{2,0}$ [?]): [X] de género 2 sin puntos

Prop. (RR, $g=2$): $\ell(D) = \deg(D) + \underbrace{1-g}_{-1} + \ell(K-D)$

$\Longrightarrow \exists f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1 \ (\deg f = 2)$

Prop. (RH, $g=2$): $\chi(\tilde{S}) - r = N(\chi(S) - b)$

$\Longrightarrow 2-2(2) - r = (2)\left[(2-2(0)) - b\right] \overset{¿P}{\Longrightarrow} b = 6$

Hecho: T∃R $\Longrightarrow$ Ramif. determina X como variedad

$\therefore M_{2,0} \cong M_{0,6}/S_6$

Objetivos a futuro:

- Aprender de superficies de Riemann (RR, RH, T∃R).
- Entender cómo estratificar $\overline{M}$
- Ver M como una orbidad y como funtor.
- Ver clases de Chern, ψ, λ

¡GRACIAS por oírme hoy!