Cohomología Equivariante:

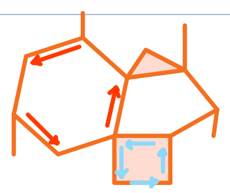
Introducción y Ejemplos

⚠ Ninguna imagen se usa con permiso
⚠ No se reservan derechos
⚠ Todo derecho de autor se infringe
⚠ Este trabajo no recibió apoyo de la NSF
⚠ Hay conflictos de interés

---

1. Premier

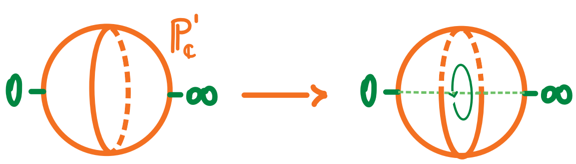
▷ $H^i(X) \longleftrightarrow$ subvariedades de dim. $n-i$ (codim. i) $/\sim$



$\rightsquigarrow$ H contabiliza huecos

▷ $H^* := \bigoplus_{i=1}^{n} H^i$ con $V_1 \cdot V_2 = V_1 \cap V_2$

▷ Acciones:



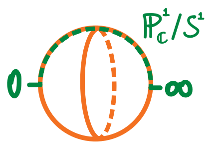
$\to S^1 \cdot \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ vía $u \cdot z = uz$

▷ $u \cdot 0 = 0$, $u \cdot \infty = \infty$

▷ $z \neq 0, \infty \implies u \cdot z = z \iff u = 1$

▷ ¿$H^*_{S^1}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$?

$\to H^*(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/S^1) = \ldots \qquad \ldots = H^*(pt.)$ ¡Trivial!



$\cong$ [—]

↳ contráctil

2. La construcción de Borel

Idea: $X \simeq Y \implies H^*(X) \cong H^*(Y)$

$\circ \simeq$ ▭ $\implies H^*(S^1) \cong H^*(S^1 \times [0,1])$

▷ Sup. $G \cdot X$, inventemos EG t.q.

i) $EG \cdot G$ es libre ($\forall x \ \mathrm{Stab}(x) = 0$)
ii) EG es contráctil
iii) $\exists!\, EG$ / homotopía (universal)

$\implies X \times EG \simeq X$

Def. (Espacio de Clasificación):

$$X_G := X \times EG / (g\cdot x, y) \sim (x, y \cdot g)$$

Def. (Cohom. Equivar.):

$$H^*_G(X) := H^*(X_G)$$

Ex. ($H^*_G pt.$, $G = \mathbb{Z}$ y $G = \mathbb{C}^\times$)

i) $E\mathbb{Z} = \mathbb{R}$ c/ $x \cdot n = x + n$	i) $E\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^\infty \setminus 0$, $\alpha \cdot \underline{z} = (\alpha z_i)_i$
ii) $pt._{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}/x \sim x+n \cong S^1$	ii) $pt._{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}^\infty \setminus 0 / \alpha \cdot \underline{z} \sim \underline{z} \cong \mathbb{P}^\infty$
iii) $H^*_{\mathbb{Z}} pt. = H^* S^1 = \mathbb{Z}[t]/t^2$	iii) $H^*_{\mathbb{C}^\times} pt. = H^* \mathbb{P}^\infty = \mathbb{C}[t]$

¿Y si $G = S_n$ ó $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? ¿Y GL_n, SL_n, O_n, Sp_n?

▷ Misma idea c/ $X \neq pt.$ ...

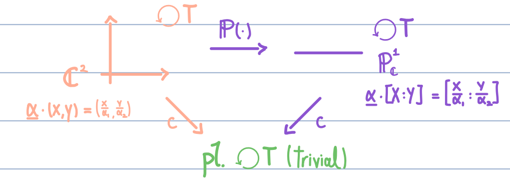
Ex.: $H^*_{(\mathbb{C}^\times)^2}(\mathbb{P}^1) = H^*((\mathbb{C}^\infty \setminus 0)^2 \times \mathbb{P}^1/\sim)$ ... !!!

Tma.: Si $E \xrightarrow{\pi} B$ es un fibrado vec. de rango r, $\exists\ \mathbb{P}(E) \to B$ fib. proyectivo de rango $r-1$ y

$$H^*_G(\mathbb{P}(E)) \cong H^*_G(B)[h] / \sum_{k=0}^{r} c^G_k(E) h^{r-k}$$

Ex.: $H_T^*(\mathbb{P}^1)$, $T := (\mathbb{C}^\times)^2$

idea:



$\to H_T^*\,\mathrm{pt.} = \mathbb{C}[t_1, t_2]$,

$\to c_0^T(\mathbb{C}^2) = 1$, $c_1^T(\mathbb{C}^2) = -t_1 - t_2$, $c_2^T(\mathbb{C}^2) = t_1 t_2$

↳ c/ linearizaciones de fibrados

$\therefore H_T^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}[t_1, t_2, h] / (h - t_1)(h - t_2)$

3. Puntos fijos y Localización

Tma. (Atiyah-Bott): Si $G \curvearrowright X$ y $F_k \subseteq X$ son t.q. $G \cdot F_k = F_k$, ent.

$$\begin{tikzcd} H_G^*(X) \arrow[rr, bend left, "i^*"] & \cong & \bigoplus\limits_{*} H_G^*(F_k) \arrow[ll, bend left, "\frac{i_*}{e(N_{\cdot|X})}"] \end{tikzcd}$$

c/ mapas inducidos x/ $i_k : F_k \hookrightarrow X$

Ex. ($H_T^*(\mathbb{P}^1)$ c/ A-B):

i) ¿F_k? $\underline{\alpha} \cdot [X:Y] = [X:Y] \iff \left[\frac{X}{\alpha_1} : \frac{Y}{\alpha_2}\right] = [X:Y]$

$$\iff \exists \lambda \begin{cases} X = \alpha_1 \lambda X \\ Y = \alpha_2 \lambda Y \end{cases}$$

⋮

$\therefore$ Tenemos $F_1 = [0:1]$ y $F_2 = [1:0]$

ii) Usamos A-B:

$$H_T^*(\mathbb{P}^1) \cong H_T^*([0:1]) \oplus H_T^*([1:0])$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathbb{C}[t_1, t_2, h]}{(h - t_1)(h - t_2)} \cong \mathbb{C}[t_1, t_2] \oplus \mathbb{C}[t_1, t_2]$$

¿Cómo es este isomorfismo?
¿Adónde van los generadores?

($\underline{i}^*$)

$t_1, t_2 \longleftarrow$ hiperplanos en $\mathbb{P}^\infty$

$h \longleftarrow$ generador de $\mathcal{O}(1)$ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$

$$\begin{cases} t_1 \\ t_2 \\ h \end{cases} \overset{\underline{i}^*}{\longmapsto} \begin{matrix} (t_1, t_1) \\ (t_2, t_2) \\ (t_1, t_2) \end{matrix}$$

$\left(\frac{i_*}{e(N_{\cdot|X})}\right)$ Los elems. básicos son $[0:1]$ y $[1:0]$.

$$\begin{cases} [0:1] \\ [1:0] \end{cases} \overset{i_*}{\longmapsto} \begin{matrix} h - t_2 \\ h - t_1 \end{matrix}$$

¡Pero necesitamos los fibrados normales!

$$\begin{cases} [0:1] \\ [1:0] \end{cases} \overset{e(N_{\cdot|X})}{\longmapsto} \begin{matrix} t_1 - t_2 \\ t_2 - t_1 \end{matrix}$$

◦ Finalmente componiendo

$$\begin{cases} \overset{1\cdot[0:1] + 0\cdot[1:0]}{\overset{\parallel}{[0:1]}} \\ [1:0] \end{cases} \overset{\frac{i_*}{e(N_{\cdot|X})}}{\longmapsto} \begin{matrix} \frac{h - t_2}{t_1 - t_2} \\ \frac{h - t_1}{t_2 - t_1} \end{matrix} \overset{\underline{i}^*}{\longmapsto} \begin{matrix} \left(\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_2}, \frac{t_2 - t_2}{t_1 - t_2}\right) \\ \left(\frac{t_1 - t_1}{t_2 - t_1}, \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1}\right) \end{matrix} = \boxed{\begin{matrix} (1, 0) \\ (0, 1) \end{matrix}}$$

◦ Rick: ¿Acaso la fórmula de Atiyah-Bott se relaciona c/ la fórmula de proyección?

$\to$ La fórmula de proyección dice:

$$f_*(\alpha \cdot f^* \beta) = f_* \alpha \cdot \beta$$

y de cierta forma, A-B dice $i_* i^* Y = e(N_{Y|X})$.

El lado derecho: $e(N_{Y|X})$ expresa la intersección Y^2, ent. quisiéramos ver $f_* \alpha \cdot \beta$ como Y^2 y a la vez $\alpha = 1$, la clase fundamental.

Ahora yo pregunto: ¿Será esto posible?