Básicos de Topología Categórica

Vivian De Leon

16 de Octubre, 2024

Topología Inicial

Definición

Sean X y Y dos conjuntos,

$$f : X \to Y$$

una función, σ una topología para Y y

$$F := \{\gamma \in \mathrm{Top}[X] : (X, \gamma) \xrightarrow{f} (Y, \sigma) \text{ es continua}\}$$

Diremos que $\tau \in \mathrm{Top}[X]$ es la **topología inicial** para X respecto de (f, σ) si $\tau = \inf F$. Lo denotaremos por $\tau \mapsto (f, \sigma)$.

Topología Final

Definición

Sean X y Y dos conjuntos,

$$f : X \to Y$$

una función, τ una topología para X y

$$F' := \{\gamma \in \mathrm{Top}[Y] : (X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \gamma) \text{ es continua}\}$$

Diremos que $\sigma \in \mathrm{Top}[X]$ es la **topología final** para Y respecto de (τ, f) si $\sigma = \sup F'$. Lo denotaremos por $(\tau, f) \mapsto \sigma$.

Caracterización de topología inicial

Proposición.

Sea $f : X \to Y$ una función, $\tau \in \text{Top}[X]$ y $\sigma \in \text{Top}[Y]$. Son equivalentes:

(a) $\tau \mapsto (f, \sigma)$.

(b) $\tau = \{f^{-1}[V] : V \in \sigma\}$

(c)
- La función $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua
- Dada cualquier función $g : Z \to X$ y cualquier $\rho \in \text{Top}(Z)$, si $f \circ g : (Z, \rho) \to (Y, \sigma)$ es continua entonces $g : (Z, \rho) \to (Z, \tau)$ es continua

(c)
- La función $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua
- Dada cualquier factorización $(X, \tau) \xrightarrow{h} (W, \omega) \xrightarrow{k} (Y, \sigma)$ de f tal que h es biyectiva, entonces $h : (X, \tau) \to (W, \omega)$ es un homeomorfismo.

Encajes y Cocientes

Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y inyectiva entre dos espacios topológicos. Son equivalentes:

(a) τ es final respecto a la pareja (f, σ).

(b) f es un **encaje** entre espacios topológicos.

Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y suprayectiva entre dos espacios topológicos. Son equivalentes:

(a) σ es final respecto a la pareja (τ, f).

(b) f es un **cociente** entre espacios topológicos.

Factorizaciones canónicas

Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua entre dos espacios topológicos. Notemos que f admite una factorización mediante funciones continuas de la forma

$$(X, \tau) \xrightarrow{f'} (f[X], \sigma_{f[X]}) \xrightarrow{\iota} (Y, \sigma)$$

donde $\sigma_{f[X]}$ es la topología inicial para $f[X]$ respecto de la inclusión natural ι y de la topología σ, mientras que la función f' es la restricción de f a su imagen.

Factorizaciones canónicas

Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua entre dos espacios topológicos. Notemos que f admite una factorización mediante funciones continuas de la forma

$$(X, \tau) \xrightarrow{p} (X_r, \tau_r) \xrightarrow{f'} (Y, \sigma)$$

donde $X_r = \{f^{-1}(y)\}_{y \in f[X]}$, p es la proyección natural

$$\begin{aligned} p : X &\to X_r \\ x &\to f^{-1}(f(x)) \end{aligned}$$

y la topología τ_r para X_r es final respecto de la pareja (τ, p).

Topología Inicial para una Fuente de funciones

Definición

Sean $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos,

$$(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$$

una fuente de funciones y

$$F := \{\gamma \in \mathrm{Top}[X] : (X, \gamma) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i) \text{ es continua } \forall i \in I\}$$

Diremos que $\tau \in \mathrm{Top}[X]$ es la **topología inicial** para X respecto de (f_i, τ_i) si $\tau = \inf F$. Lo denotaremos por $\tau \mapsto (f_i, \tau_i)_{i \in I}$.

Tomemos una fuente de funciones continuas

$$(f_i : (Y, \phi) \to (X_i, \tau_i)_{i \in I}).$$

Podemos considerar al producto topológico del codominio de dicha fuente

$$(X, \tau) := \prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$$

y la fuente de proyecciones canónicas $(\pi_i = (X, \tau) \to (X_i, \tau_i))_{i \in I}$.

$$\begin{tikzcd}
 & (Y, \sigma) \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[rr, "f_i"] & & (X_i, \tau_i) \\
(f[Y], \tau_{f[Y]}) \arrow[rr, "i"'] & & (X, \tau) \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Topología Final para un Pozo de funciones

Definición

Sean $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos,

$$(f_i : X_i \to X)_{i \in I}$$

un pozo de funciones y

$$F' := \{\gamma \in \mathrm{Top}[X] : (X_i, \tau_i) \xrightarrow{f_i} (X, \gamma) \text{ es continua } \forall i \in I\}$$

Diremos que $\tau \in \mathrm{Top}[X]$ es la **topología final** para X respecto de (τ_i, f_i) si $\tau = \sup F'$. Lo denotaremos por $(\tau_i, f_i)_{i \in I} \mapsto \tau$.

Tomemos un pozo de funciones continuas

$$(f_i : (X_i, \tau_i) \to (Y, \sigma)_{i \in I})$$

podemos considerar al coproducto topológico del dominio de dicho pozo

$$(X, \tau) := \coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$$

y el pozo de inclusiones canónicas $(\iota_i = (X_i, \tau_i) \to (X, \tau))_{i \in I}$.

$$\begin{tikzcd}
(X_i, \tau_i) \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\iota_i"'] & & (Y, \sigma) & \\
& (X, \tau) \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "p"'] & & (X_r, \tau_r) \arrow[ul, "f'"']
\end{tikzcd}$$

Propiedades Reflexivas

Definición

Una propiedad topológica **P** es **reflexiva** si a cada (X, τ) podemos asociarle un $(X_P, \tau_P) \in$ **P** y una función continua

$$P_X : (X, \tau) \to (X_P, \tau_P)$$

tales que, dada $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ con $(Y, \sigma) \in$**P** entonces existe:

$$\begin{tikzcd}
(X, \tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "P_X"'] & & (Y, \sigma) \\
& (X_P, \tau_P) \arrow[ur, "f'"'] \arrow[u, phantom, "///"] &
\end{tikzcd}$$

Propiedades Coeflexivas

Definición

Una propiedad topológica **P** es **coreflexiva** si a cada (X, τ) podemos asociarle un $(X_P, \tau_P) \in$ **P** y una función continua

$$P_X : (X_P, \tau_P) \to (X, \tau)$$

tales que, dada $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ con $(Y, \sigma) \in$**P** entonces existe:

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) & & (Y,\sigma) \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "f'"] \\
& (X_P,\tau_P) \arrow[ul, "P_X"] &
\end{tikzcd}$$

Compactaciones

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una **compactación** de dicho espacio es una pareja $(f, (Y, \sigma))$ donde (Y, σ) es compacto y T_2, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es un encaje y $f[X]$ es denso en (Y, σ).

Se puede probar que para cualquier (X, τ) existe una pareja $(f^*, (Y, \sigma))$ tal que cumple con casi todas estas características (no es un encaje). Esto se soluciona cuando (X, τ) es Tychonoff ($T_{3\frac{1}{2}}$).

Definición

A esta compactación se le llama compactación de **Čech-Stone**.

Compactación de Čech-Stone

Proposición

Sea (X, τ) un espacio topológico, $f^* : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ la función usada anteriormente y (Z, ρ) un espacio compacto y T_2. Si $h : (X, \tau) \to (Z, \rho)$ es una función continua entonces:

$$\begin{tikzcd} (X, T) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & (Y, \sigma) \text{ es compacto y } T_2 \\ & (Z, \rho) \text{ compacto y } T_2 \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$