

Básicos de Topología Categórica

Vivian De Leon

16 de Octubre, 2024

Topología Inicial

Definición

Sean X y Y dos conjuntos,

$$f : X \rightarrow Y$$

una función, σ una topología para Y y

$$F := \{\gamma \in \text{Top}[X] : (X, \gamma) \xrightarrow{f} (Y, \sigma) \text{ es continua}\}$$

Diremos que $\tau \in \text{Top}[X]$ es la **topología inicial** para X respecto de (f, σ) si $\tau = \inf F$. Lo denotaremos por $\tau \mapsto (f, \sigma)$.

Topología Final

Definición

Sean X y Y dos conjuntos,

$$f : X \rightarrow Y$$

una función, τ una topología para X y

$$F' := \{\gamma \in \text{Top}[Y] : (X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \gamma) \text{ es continua}\}$$

Diremos que $\sigma \in \text{Top}[Y]$ es la **topología final** para Y respecto de (τ, f) si $\sigma = \sup F'$. Lo denotaremos por $(\tau, f) \mapsto \sigma$.

Caracterización de topología inicial

Proposición.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, $\tau \in \text{Top}[X]$ y $\sigma \in \text{Top}[Y]$. Son equivalentes:

(a) $\tau \mapsto (f, \sigma)$.

(b) $\tau = \{f^{-1}[V] : V \in \sigma\}$

- (c)
 - La función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua
 - Dada cualquier función $g : Z \rightarrow X$ y cualquier $\rho \in \text{Top}(Z)$, si $f \circ g : (Z, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua entonces $g : (Z, \rho) \rightarrow (Z, \tau)$ es continua
- (c)
 - La función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua
 - Dada cualquier factorización $(X, \tau) \xrightarrow{h} (W, \omega) \xrightarrow{k} (Y, \sigma)$ de f tal que h es biyectiva, entonces $h : (X, \tau) \rightarrow (W, \omega)$ es un homeomorfismo.

Encajes y Cocientes

Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función continua y inyectiva entre dos espacios topológicos. Son equivalentes:

- (a) τ es final respecto a la pareja (f, σ) .
- (b) f es un **encaje** entre espacios topológicos.

Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función continua y suprayectiva entre dos espacios topológicos. Son equivalentes:

- (a) σ es final respecto a la pareja (τ, f) .
- (b) f es un **cociente** entre espacios topológicos.

Factorizaciones canónicas

Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función continua entre dos espacios topológicos. Notemos que f admite una factorización mediante funciones continuas de la forma

$$(X, \tau) \xrightarrow{f'} (f[X], \sigma_{f[X]}) \xrightarrow{\iota} (Y, \sigma)$$

donde $\sigma_{f[X]}$ es la topología inicial para $f[X]$ respecto de la inclusión natural ι y de la topología σ , mientras que la función f' es la restricción de f a su imagen.

Factorizaciones canónicas

Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función continua entre dos espacios topológicos. Notemos que f admite una factorización mediante funciones continuas de la forma

$$(X, \tau) \xrightarrow{p} (X_r, \tau_r) \xrightarrow{f'} (Y, \sigma)$$

donde $X_r = \{f^{-1}(y)\}_{y \in f[X]}$, p es la proyección natural

$$\begin{aligned} p : X &\rightarrow X_r \\ x &\rightarrow f^{-1}(f(x)) \end{aligned}$$

y la topología τ_r para X_r es final respecto de la pareja (τ, p) .

Topología Inicial para una Fuente de funciones

Definición

Sean $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos,

$$(f_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$$

una fuente de funciones y

$$F := \{ \gamma \in \text{Top}[X] : (X, \gamma) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i) \text{ es continua } \forall i \in I \}$$

Diremos que $\tau \in \text{Top}[X]$ es la **topología inicial** para X respecto de (f_i, τ_i) si $\tau = \inf F$. Lo denotaremos por $\tau \mapsto (f_i, \tau_i)_{i \in I}$.

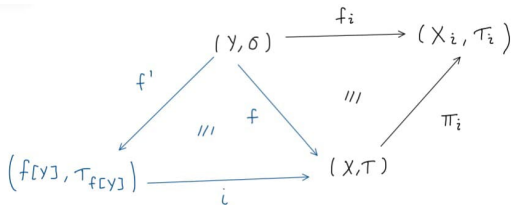
Tomemos una fuente de funciones continuas

$$(f_i : (Y, \phi) \rightarrow (X_i, \tau_i)_{i \in I}).$$

Podemos considerar al producto topológico del codominio de dicha fuente

$$(X, \tau) := \prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$$

y la fuente de proyecciones canónicas $(\pi_i = (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i))_{i \in I}$.



Topología Final para un Pozo de funciones

Definición

Sean $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos,

$$(f_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$$

un pozo de funciones y

$$F' := \{ \gamma \in \text{Top}[X] : (X_i, \tau_i) \xrightarrow{f_i} (X, \gamma) \text{ es continua } \forall i \in I \}$$

Diremos que $\tau \in \text{Top}[X]$ es la **topología final** para X respecto de (τ_i, f_i) si $\tau = \sup F'$. Lo denotaremos por $(\tau_i, f_i)_{i \in I} \mapsto \tau$.

Tomemos un pozo de funciones continuas

$$(f_i : (X_i, \tau_i) \rightarrow (Y, \sigma))_{i \in I}$$

podemos considerar al coproducto topológico del dominio de dicho pozo

$$(X, \tau) := \coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$$

y el pozo de inclusiones canónicas $(l_i = (X_i, \tau_i) \rightarrow (X, \tau))_{i \in I}$.

A commutative diagram illustrating the relationship between a family of spaces, their topological coproduct, and a target space. The diagram consists of four nodes: (X_i, τ_i) at the top left, (X, τ) at the bottom left, (Y, σ) at the top right, and (X_r, τ_r) at the bottom right. Arrows are as follows: f_i from (X_i, τ_i) to (Y, σ) ; l_i from (X_i, τ_i) to (X, τ) ; f from (X, τ) to (Y, σ) ; p from (X, τ) to (X_r, τ_r) ; f' from (X_r, τ_r) to (Y, σ) . There are also three sets of three parallel arrows (represented by three slashes) connecting (X_i, τ_i) to (X, τ) , (X, τ) to (Y, σ) , and (X_r, τ_r) to (Y, σ) .

Propiedades Reflexivas

Definición

Una propiedad topológica \mathbf{P} es **reflexiva** si a cada (X, τ) podemos asociarle un $(X_P, \tau_P) \in \mathbf{P}$ y una función continua

$$P_X : (X, \tau) \rightarrow (X_P, \tau_P)$$

tales que, dada $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ con $(Y, \sigma) \in \mathbf{P}$ entonces existe:

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (Y, \sigma) \\ & \searrow P_X & \nearrow f' \\ & (X_P, \tau_P) & \end{array}$$

///

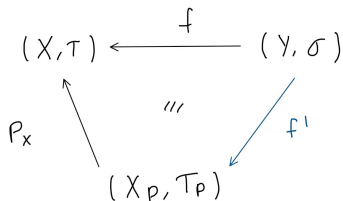
Propiedades Coeflexivas

Definición

Una propiedad topológica **P** es **coflexiva** si a cada (X, τ) podemos asociarle un $(X_P, \tau_P) \in \mathbf{P}$ y una función continua

$$P_X : (X_P, \tau_P) \rightarrow (X, \tau)$$

tales que, dada $f : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ con $(Y, \sigma) \in \mathbf{P}$ entonces existe:



Compactaciones

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una **compactación** de dicho espacio es una pareja $(f, (Y, \sigma))$ donde (Y, σ) es compacto y T_2 , $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es un encaje y $f[X]$ es denso en (Y, σ) .

Se puede probar que para cualquier (X, τ) existe una pareja $(f^*, (Y, \sigma))$ tal que cumple con casi todas estas características (no es un encaje). Esto se soluciona cuando (X, τ) es Tychonoff ($T_{3\frac{1}{2}}$).

Definición

A esta compactación se le llama compactación de **Čech-Stone**.

Compactación de Čech-Stone

Proposición

Sea (X, τ) un espacio topológico, $f^* : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ la función usada anteriormente y (Z, ρ) un espacio compacto y T_2 . Si $h : (X, \tau) \rightarrow (Z, \rho)$ es una función continua entonces:

